



TITLE:

# Smorynskiの問題について(数学基礎論)

AUTHOR(S):

上江州, 忠弘

---

CITATION:

上江州, 忠弘. Smorynskiの問題について(数学基礎論). 数理解析研究所講究録 1983, 480: 192-203

ISSUE DATE:

1983-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103373>

RIGHT:

Smorynski の問題について

九大理 上江洲忠弘 (Tadahiro Uem)

C. Smorynski は [3] で次の問題を提出した.

Axiomatize the equality and apartness fragments  
of the theory  $DLO^+$ .

ここに,  $DLO^+$  は dense linear order の intuitionistic theory で, 次の公理を持つものである.

$$\neg x < x, \quad x < y \wedge y < z \supset x < z, \quad x < y \supset x < z \vee z < y,$$

$$\exists x \exists y \, x < y,$$

$$\exists z ((x < y \supset x < z < y) \wedge (y < x \supset y < z < x) \wedge (x = y \supset x = z = u)).$$

また,  $DLO^+$  に於ける apartness の概念は

$$x \# y \Leftrightarrow x < y \vee y < x$$

で与えられ, equality は

$$x = y \Leftrightarrow \neg x \# y$$

で与えられる.

以下に於て, この問題に対する一つの解答を与える.

## 1. 準備

言語  $L$  の節 (Sequng) の集合  $G$  と,  $L$  の推論図の集合  $S$  との組  $(G, S)$  を言語  $L$  上の (形式) 理論 という.  $G$  の元も理論  $(G, S)$  の 始節 という.

例えば,  $LK$  は,  $\Rightarrow \Rightarrow$  の形の節全てから成る集合  $G_K$  と  $LK$  の全ての推論図から成る集合  $S_K$  との組  $(G_K, S_K)$  と見做せば, 理論である.

理論の証明図, 証明可能性等の概念は Gentzen の  $LK, LJ$  と同様に定義する.

理論  $T (= (G, S))$  と節の集合  $G'$  に対し, 理論  $(G \cup G', S)$  で節  $\Gamma \rightarrow \Delta$  が証明可能のとき

$$G' \vdash_T \Gamma \rightarrow \Delta$$

とかく.

推論図の集合が, exchange, contraction, cut 及び substitution:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \theta \rightarrow \Delta \theta} \quad (\theta \text{ は代入})$$

から成る理論を  $RSL$  という.  $RSL$  は J.A. Robinson [2] の resolution にちなむ.

本稿で, LJ は Gentzen の LJ を次のように変形したものを指す:

- (1) 節はその右辺に2つ以上論理式があってもよい。  
 (2)  $(\rightarrow\supset)$ ,  $(\rightarrow\neg)$  以外の推論図は LK の推論図で, 推論図  $(\rightarrow\supset)$  と  $(\rightarrow\neg)$  とは Gentzen の LJ の推論図とする。

## 2. 理論 $AP^+$

# と < とを 2 項述語記号,  $A$  を 3 項述語記号とする。

次の節から成る集合を  $G_0$  とする:

$$A(x, u, y), x < y \rightarrow x < u ; \quad A(x, u, y), y < x \rightarrow u < x ;$$

$$A(x, u, y), x < y \rightarrow u < y ; \quad A(x, u, y), y < x \rightarrow y < u ;$$

$$A(x, u, y), x < u \rightarrow u < y ; \quad A(x, u, y), u < x \rightarrow y < u ;$$

$$A(x, u, y), u < y \rightarrow x < u ; \quad A(x, u, y), y < u \rightarrow u < x ;$$

$$x < x \rightarrow ;$$

$$x < y, y < z \rightarrow x < z ;$$

$$x < y \rightarrow x < z, z < y ;$$

$$x < y \rightarrow x \# y ;$$

$$y < x \rightarrow x \# y ;$$

$$x \# y \rightarrow x < y, y < x .$$

節  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \rightarrow \beta_1, \dots, \beta_n$  に対し,  $m \neq 0, n \neq 0$  のとき, 論理式  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m \supset \beta_1 \vee \dots \vee \beta_n$  をこの 節の論理式 という. また,  $m=0, n \neq 0$  のときは論理式  $\beta_1 \vee \dots \vee \beta_n$  を,  $m \neq 0, n=0$  のときは論理式  $\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m)$  をそれぞれこの 節の論理式 という.

述語記号  $A$  を持つ素論理式の列  $A(x_1, u_1, y_1), \dots, A(x_k, u_k, y_k)$  に対し, 節  $a_1 \# b_1, \dots, a_m \# b_m \rightarrow c_1 \# d_1, \dots, c_n \# d_n$  が次の条件 (1), (2) をみたすとき, この節の論理式を, この列の 切片 という.

(1)  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$  のいずれも  $x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k$  のいずれかである.

(2) 列  $A(x_1, u_1, y_1), \dots, A(x_k, u_k, y_k)$  の部分列  $\Gamma$  で,

$$G_0 \mid_{\text{RSL}} \Gamma, a_1 \# b_1, \dots, a_m \# b_m \rightarrow c_1 \# d_1, \dots, c_n \# d_n$$

なるものがある.

列  $A(x_1, u_1, y_1), \dots, A(x_k, u_k, y_k)$  の切片は有限個である. その全ての切片を  $\wedge$  でつないで得られる論理式を

$$E_k(x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k)$$

で表し, 次の論理式を  $F_k$  で表す.

$$\forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \dots \forall x_k \forall y_k \exists u_k E_k(x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k).$$

LJ に始節として

$$\rightarrow \exists x \exists y x \# y ; \rightarrow F_1 ; \rightarrow F_2 ; \dots$$

を付加して得られる理論を  $AP^+$  とする.

定理  $DLO^+$  は  $AP^+$  上 conservative である.

従って,  $AP^+$  は  $DLO^+$  の apartness の部分を公理化したものである.

### 3. 定理の証明

言語  $\{\#, <, A\}$  の推論図で, 次の形のものを全てから成る集合を  $S_0$  とする:

$$\frac{A(x, u, y), \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta},$$

但し, 変数  $u$  は,  $x, y$  と異なり, また, 節  $\Gamma \rightarrow \Delta$  に自由に現れない.

LJ に  $G_0$  と  $S_0$  を付加し, 更に, 始節  $\rightarrow \exists x \exists y x \# y$  を付加して得られる理論を  $DLO^+(A)$  で表す.

次の命題は明らかである。

命題1  $DLO^+(A)$  は  $DLO^+$  上 conservative である。

$LJ$  に  $S_0$  を付加して得られる理論を  $LJ+S_0$  とし,  
 $LJ+S_0$  から cut を除いた理論を  $LJ+S_0-Cut$  で表す。

$\bar{G}_0 = \{ \Gamma \rightarrow \Delta \mid \Gamma \rightarrow \Delta \text{ は言語 } \{ \#, A \} \text{ の節で, } G_0 \vdash_{RSL} \Gamma \rightarrow \Delta \}$   
 とおく。

Gentzen の Hauptsatz と同様に, 次の命題を得る。

命題2 言語  $\{ \#, A \}$  の節  $\Gamma \rightarrow \Delta$  に対し,  $G_0 \vdash_{LJ+S_0} \Gamma \rightarrow \Delta$   
 ならば,  $\bar{G}_0 \vdash_{LJ+S_0-Cut} \Gamma \rightarrow \Delta$  である。

命題2は  $LJ$  も  $LK$  にしても成り立つ。また,  $LJ+S_0$  を  
 $LJ$  にしても  $LK$  にしても成り立つ。同様の Hauptsatz の変形  
 が [1] にあつ。

命題3 述語記号は#のみを含む節  $\Gamma \rightarrow \Delta$  に対し,

$$\overline{G}_0 \mid \frac{}{LJ+S_0-Cut} A(a_1, b_1, c_1), \dots, A(a_m, b_m, c_m), \Gamma \rightarrow \Delta$$

ならば,

$$\vdash \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \dots \forall x_n \forall y_n \exists u_n E_{m+n}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_n, u_n, y_n, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m), \Gamma \rightarrow \Delta$$

なる自然数  $n$  がある.

(証明)  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m, \Gamma \rightarrow \Delta$  を述語記号は#のみを含む節とし,  $P$  を節

$$\Gamma_1, A(a_1, b_1, c_1), \Gamma_2, \dots, \Gamma_m, A(a_m, b_m, c_m), \Gamma \rightarrow \Delta$$

の  $\overline{G}_0$  からの  $LJ+S_0-Cut$  の証明図とする.  $P$  に含まれる推論図の個数  $l$  に関する帰納法により

$$\vdash \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \dots \forall x_n \forall y_n \exists u_n E_{m+n}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_n, u_n, y_n, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m), \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m, \Gamma \rightarrow \Delta$$

なる  $n$  があることを示す.

$l=1$  のときは  $E_n$  の定義より明らか.

$l>1$  のとき, 次の3通りの場合が考えられる:

(1)  $P$  の最後の推論図が

$$\frac{A(x, u, y), \Gamma_0 \rightarrow \Delta}{\Gamma_0 \rightarrow \Delta}$$

の場合,



(2)  $\mathcal{P}$  の最後の推論図が

$$\frac{\Gamma_2, A(a_2, b_2, c_2), \dots, \Gamma_m, A(a_m, b_m, c_m), \Gamma \rightarrow \Delta}{A(a_1, b_1, c_1), \Gamma_2, A(a_2, b_2, c_2), \dots, \Gamma_m, A(a_m, b_m, c_m), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

の場合,

(3) (1), (2) 以外の場合.

(1) の時, 帰納法の仮定により

$$\vdash_{\mathcal{L}} \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \dots \forall x_n \forall y_n \exists u_n E_{(m+1)+n}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_n, u_n, y_n, x, u, y, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m), \Gamma_1, \dots, \Gamma_m, \Gamma \rightarrow \Delta.$$

ここで,  $u$  の条件より

$$\vdash_{\mathcal{L}} \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \dots \forall x_{m+1} \forall y_{m+1} \exists u_{m+1} E_{m+n+1}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_{m+1}, u_{m+1}, y_{m+1}, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m), \Gamma_1, \dots, \Gamma_m, \Gamma \rightarrow \Delta.$$

(2) の時,

$$\vdash_{\mathcal{L}} E_{m+n}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_n, u_n, y_n, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_m, b_m, c_m) \rightarrow E_{m+n-1}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_n, u_n, y_n, a_2, b_2, c_2, \dots, a_m, b_m, c_m)$$

であるから, 帰納法の仮定から明らか.

(3) の時, 帰納法の仮定から明らか.

(証明終)

命題 4    どの  $k$  に対しても  $\vdash_{\text{DLO}^*} F_k$ .

(証明)  $\vdash_{\text{DLO}^*(A)} A(x_1, u_1, y_1), \dots, A(x_k, u_k, y_k) \rightarrow E_k(x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k)$

であるから,  $\frac{}{DLO^+(A)} F_k$ . 従って命題1より  $\frac{}{DLO^+} F_k$ .  
(証明終)

(定理の証明) 命題4により,  $DLO^+$ は  $AP^+$ の拡張である.

併  $\Gamma \rightarrow \Delta$  は述語記号  $\langle$  を含んでいないとし,  $\frac{}{DLO^+} \Gamma \rightarrow \Delta$  とする.

命題1より  $\frac{}{DLO^+(A)} \Gamma \rightarrow \Delta$ .

従って,  $G_0 \frac{}{LJ+S_0} \exists x \exists y x \# y, \Gamma \rightarrow \Delta$ .

よって命題2より  $G_0 \frac{}{LJ+S_0-Cut} \exists x \exists y x \# y, \Gamma \rightarrow \Delta$ .

従って, 命題3より  $\frac{}{LJ} F_n, \exists x \exists y x \# y, \Gamma \rightarrow \Delta$  なる  $n$  がある.

従って  $\frac{}{AP^+} \Gamma \rightarrow \Delta$ .

よって  $DLO^+$  は  $AP^+$  上 conservative である.

(証明終)

#### 4. 注意

(i) Smoryński は [3] で, 次の公理を持つ理論  $AP_0^+$  が  $DLO^+$  の *apartness* の部分であるかと予想していた.

$AP_{\omega}^0$  の公理:

$$\neg x \# x,$$

$$x \# y \supset y \# x,$$

$$x \# y \supset x \# z \vee z \# y,$$

$$\exists x \exists y \ x \# y,$$

$$\forall x \forall y \exists x_1 \dots \exists x_n \text{Exp}_{n+2}(x, y, x_1, \dots, x_n)$$

( $n \geq 1$ ),

但し,  $\text{Exp}_k(a_1, \dots, a_n)$  は論理式

$$\bigwedge_{i,j} (a_i \# a_j \supset \bigwedge_{k \neq l} a_k \# a_l)$$

を表す.

しかし次の命題が成り立つので, この予想は間違っていた.

命題 どの  $k$  に対しても  $\frac{}{AP_{\omega}^0} F_k \rightarrow F_{k+1}$  ではない.

証明は Kripke model を作って得られる.

(ii)  $\Sigma$  を述語記号  $A$  を持つ素論理式の列

$$A(x_1, u_1, y_1), \dots, A(x_k, u_k, y_k)$$

とし,  $\Gamma \rightarrow \Delta$  も許

$$a_1 \# b_1, \dots, a_m \# b_m \rightarrow c_1 \# d_1, \dots, c_n \# d_n$$

とする. 但し,  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$  のいずれ

も  $x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k$  のいずれかであるとする.

$A_k$  を次の条件 (\*) をみたす対応  $\alpha: \{x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k\} \rightarrow 3^k$  の全体とする.

(\*)  $1 \leq i \leq k$  なる全ての  $i$  に対し,

$$\alpha(x_i) < \alpha(u_i) < \alpha(y_i), \alpha(y_i) < \alpha(u_i) < \alpha(x_i) \text{ 又は } \alpha(x_i) = \alpha(u_i) = \alpha(y_i).$$

このとき, 次の命題が成り立つ.

**命題** 次の2つの条件は同等である.

(1)  $\Sigma$  の切片  $\Omega$  で  $\overline{\text{LJ}} \Omega, \Gamma \rightarrow \Delta$  なるものがある.

(2)  $A_k$  のどの元  $\alpha$  に対しても  $\Gamma \rightarrow \Delta$  は真である.

ここに,  $v \# w$  の  $\alpha$  による解釈は  $\alpha(v) \neq \alpha(w)$  とする.

(証明) 条件 (1) と  $\overline{G_0} \overline{\text{LJ-Cut}} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$  とは同等である.

$\Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$  は論理記号を含まないから,  $\overline{G_0} \overline{\text{LJ-Cut}} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$  と

$\overline{G_0} \overline{\text{LK-Cut}} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$  とは同等である. また, 命題2の注意に

より,  $\overline{G_0} \overline{\text{LK-Cut}} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$  と  $G_0 \overline{\text{LK}} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$  とは同等であ

る.

$\tilde{\Sigma}$  を  $\Sigma$  の  $A(x, u, y)$  なる形の論理式も全て

$$x < u < y \vee y < u < x \vee x = y = u$$

なる形の論理式におきかえたものとし,  $G_1$  を次の節から成る集合とする.

$$x < x \rightarrow ; x < y, y < z \rightarrow x < z ; x < y \rightarrow x < z, z < y ;$$

$$x < y \rightarrow x \# y ; \quad y < x \rightarrow x \# y ; \quad x \# y \rightarrow x < y, y < x.$$

このとき,  $G_0 \vdash_{LK} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$  と  $G_1 \vdash_{LK} \widetilde{\Sigma}, \Gamma \rightarrow \Delta$  とは同等であり, 更に,  $G_1 \vdash_{LK} \widetilde{\Sigma}, \Gamma \rightarrow \Delta$  と条件 (2) とは同等である.

(証明終)

上の命題から, 切片の定義の条件 (2) を次の条件 (2°) にかえてもよいことがわかる.

(2°)  $A_k$  のどの元に対しても, 節

$$a_1 \# b_1, \dots, a_m \# b_m \rightarrow c_1 \# d_1, \dots, c_n \# d_n$$

は真である.

## 文 献

- [1] 赤星 順 : 種々の除去定理, 修士論文 (九州大学) (1981) .
- [2] J.A. Robinson : A machine-oriented logic based on the resolution principle, J. ACM, 12 (1965), 23-41 .
- [3] C. Smoryński : On axiomatizing fragments, J.S.L., 42 (1977) 530-544 .